里堂學算記五種

加減乘除釋卷三

江都焦循

以甲乘乙或以乙乘甲爲相乘以乙除之得甲以甲除之得乙

相乘兩數不同之乘也所得即從方形方田術云廣十五步從十六步廣從步數相乘得積步里田術云廣二里從三里廣從里數相乘得積里是也合分術云母互乘子并以爲實母相乘爲法乘分術云母相乘爲法子相乘爲實蓋數不同而等級同也帶從開方之法從示以從故必先得廣數自乘然後與從乘

得如積也從方所示之從從之差非從之全於從之全減去廣數即餘從之差所示惟差斯多一乘也劉氏注方田術相乘得積步云此積謂田冪凡廣從相乘謂之冪李淳風以冪是方面單布之名積乃衆數聚居之稱斥注爲乖循謂廣從相乘爲冪而經不言冪言積故注云此積謂田冪謂之云者不專於是之稱也劉氏未嘗以積訓冪李斥之非矣

三數相乘爲連乘或先以乙乘甲連以丙乘之或先以丙乘乙連以甲乘之或先以甲乘丙連以乙乘之其得數皆等以甲除之得乙丙相乘之數以乙除之得甲丙

相乘之數以丙除之得甲乙相乘之數任以一數除之皆盡若以甲乘乙以乙乘丙以丙乘甲并之任以三數除之皆不盡

算經統謂之相乘方田平分術云母相乘爲法均輸假田術云畝法相乘五渠注池術云日數相乘張邱建獵鹿術云以右三位相乘蕩盃術云令人數相乘緝草云以二三四相乘得二十四是也乘同於加以甲加乙以乙加甲其數既等則以甲乘乙猶之以乙乘甲也或先以甲乙相加後加以丙或先以乙丙相加後加以甲或先以甲丙相加後加以乙其得數皆

同則以甲乙丙相乘而先甲乙者猶之先丙乙也且猶之先丙甲也諸乘方廉隅相配之法全以此義三數以上至五數六數亦然梅勿菴云凡數三宗以上用各母連乘爲其母是也除者乘之反三者皆以乘得數故皆可以除盡之如甲三乙五丙七連乘爲一百零五以三除之得三十五而盡以五除之得二十一而盡以七除之得十五而盡不必再商之而後盡也若三五相乘爲十五五七相乘爲三十五三七相乘爲二十一并之爲七十一以三除之則不盡二以五除之則不盡一以七除之則不盡一葢本各少二

乘少一乘而多一除自不足以相消矣三乘五爲十五以七除之去十四不盡一五乘七爲三十五以三除之去三十三不盡二三乘七爲二十一以五除之去二十不盡一不盡一者合之仍不盡二者合之仍不盡二何也不盡之數化於所入不能化於所出也分而除之不盡者一合而除之不盡者三何也不盡之數各居其一合聚爲三也蓋在此爲盡在彼爲不盡分之爲兩數之盡一數之不盡合之則盡者從乎不盡不盡者從乎盡不盡者從乎盡則不盡者無所移盡者從乎不盡則盡者化爲不盡於是各

有所盡已各有所不盡所不盡各合於所盡故不相礙而恰相齊也孫子算經云有物不知其數三三數之賸二五五數之賸三七七數之賸二問物幾何術云凡三三數之賸一則置七十五五數之賸一則置二十一七七數之賸一則置十五一百六以上以一百五減之卽得一百五者卽連乘之數也七十二十一十五者遞乘相并之數也賸一者三數遞除之差也明乎二乘一除之理可悟孫子比例之意也乃二乘一除亦有盡者如三七九以七乘九爲六十三以三除之亦盡然三乘九而七除則不盡七乘三而九

除則不盡知三除之而盡者爲偶然非定理設三五九爲率五九除亦不能盡矣此奇數也以偶數言之二四六遞乘并之四與二除之則盡六除之則不盡四六八遞乘并之六與八除之則盡四除之則不盡二四八遞乘并之三率除之皆盡二六八遞乘并之六與八除之不盡二除之則盡又以奇偶相閒言之三六九遞乘并之三與九除之皆盡六除之不盡二五八遞乘并之五與八除之不盡二除之則盡其盡亦皆偶然也

以甲乙與乙甲相乘爲從方廉隅積。如甲乙爲一十九，乙甲爲九十一，相乘得一千七百二十九。以甲乙減乙甲，以甲乙乘之，又以甲乙自乘，其數等。一九與九一相減，餘七十二，以一十九乘七十二，得一千三百六十八，又以一十九自乘，得三百六十一，合之爲一千七百二十九。以乙甲任分之，以甲乙徧乘之，其數等。或分九十一爲七十二與一十九，而以一九徧乘之，或分九十一爲四十五與四十六，以一九徧乘

之。或三分之。或四分之。其偏乘得數皆同。

帶從開方之法。初商有方有從。即從差次商有廉有隅有從隅。其原出於兩異數之相乘。如甲乙之乘乙甲是也。甲乙乘甲乙。如一九乘一九。爲自乘。甲乙乘乙甲。如一九乘九一。爲相乘。推之以甲乙乘乙乙。以乙甲乘甲甲。以乙甲乘乙乙。以甲乙乘甲甲。及以甲乙乘丙丁。以甲乙乘戊己。皆然。獨舉甲乙乙甲言之。見同是兩甲兩乙。一經顛倒。則變自乘爲相乘。變平方爲從方也。葢從即兩數之較數。亦即本數之分數。先自乘而又與從相乘者。即以一數偏乘諸數之理也。

一九與九一兩數相乘

一乘九　〇九

一乘一　〇一

九乘九　八一

九乘一　〇九

兩數相減先以一九自乘次以一九乘七二

〇一　〇七

〇九　〇二

〇九　六三

八一　一八

廣一九　仍原數　一九　一九

從九一　分爲兩　七二　一九　四五　四六

偏乘

一乘七　○七　一乘四　○四

一乘一　○一　一乘四　○四

一乘二　○二　一乘五　○五

一乘九　○九　一乘六　○六

九乘七　六三　九乘四　三六

九乘一　○九　九乘四　三六

九乘二　一八　九乘五　四五

九乘九　八一　九乘六　五四

從方之定位最易混淆蓋方廉隅以次相列從法不與廉隅相次必審酌而後得之若明徧乘之理如一七一同列上層則一乘七一得數亦並列上層一列上層二九列下層則相乘必並低一格九列下層與上層七一相乘以下乘上猶以上乘下故亦並列九二九皆列下層其乘得之數自又低一格矣

小從

方

大從

方

從方之例有二曰大從以甲乙乘乙甲或以甲乙乘丙丁是也曰小從以甲乙乘甲甲或以甲乙乘甲丁是也上數同下數異則從必小於上數也上數亦異則從必數倍於上數也以從與積推之可見譬以一九爲修一二爲廣則從零七而已若以一九爲廣三九爲修則從二零視廣爲倍矣至於廣一九修九一則兩數皆有從而從益大矣

小從	相減	大從	相減
一二	一二	一九	一九
一九	一二 ○七	三九	一九 二○

徧乘

一乘一　○一

一乘○　○○

一乘二　○二

一乘七　○七

二乘一　○一

二乘○　○○

二乘二　○四

二乘七　一四

徧乘

一乘一　○一

一乘二　○二

一乘九　○九

一乘○　○○

九乘一　○九

九乘二　一八

九乘九　八一

九乘○　○○

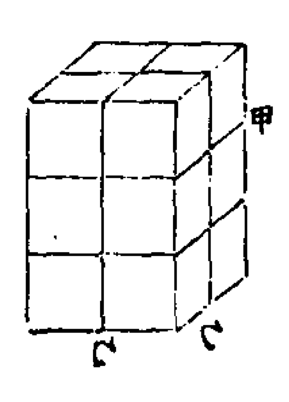
從爲數之所分於所分存其空位於徧乘依次乘之

自明定位之理。

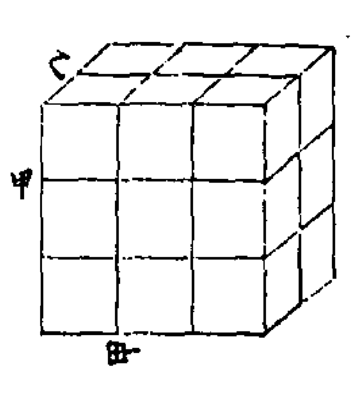
兩乙一甲連乘之，爲帶一從立方形，甲與乙相減，以乙再乘之，又以乙自乘再乘，相加，其數等，兩甲一乙連乘之，爲帶兩從相等立方形，甲與乙相減，以甲再乘之，又以甲自乘再乘，相加，其數等，甲乙丙連乘之，爲帶兩從不等立方形，以甲乙與丙相減，以丙各再乘之，又以自乘再乘，相加，其數等。

凡此數盈於彼數者爲從，兩朒一盈則一從，此立方長廉 兩盈一朒則兩從，此立方平廉 兩盈之數同，故其從相等，兩盈之數不同，故其從不相等，一從者，置一從乘之，

兩從者，置兩從乘之，固也。然以朒自乘而加從，可也。以盈自乘而減從，亦可也。



兩朒一盈



兩盈一朒

兩盈不等一肭

甲

乙

丙

兩甲兩乙連乘之或閒乘之並得帶從三乘方形甲乙相乘又以冪自乘其數等甲乙各自乘又以兩冪相乘其數等甲如句乙如股以句自乘以弦自乘乘之減句自乘之冪其數等以股自乘以弦自乘乘之減股自乘之冪其數等以句自乘以句弦較乘之又以句弦和乘

之其數等句自乘以方積乘之又以句自乘之數乘股以句股較乘之相加其數等股自乘以方積乘之又以股自乘之數乘股以句股較乘之相減其數等

算書有倍積自乘之術用爲減從開三乘方義殊奧秘細爲繹之其原發於兩甲兩乙之累乘而通其變於句股蓋乘法先後相通列甲乙甲乙而累乘之可也列甲甲乙乙而累乘之亦可也列甲乙乙甲而累乘之可也列乙甲甲乙而累乘之亦無不可也由是既以甲乘乙又以乙乘甲而後乘之可也既以甲自乘又以乙自乘而乘之可也在乘法無不可通故所

得皆同其數句股即方之分形故倍其積而自乘之亦如以方積乘方積之數倍句股積自乘即以甲乘乙又以乙乘甲而後乘之也句自乘以股自乘之數乘之即以甲自乘又以乙自乘而後乘之也弦之自乘即句股各自乘之合數今既句自乘又以股自乘乘之若以弦自乘之數乘之則多一句自乘乘之之數矣於股亦然而理甚明句弦較乘句弦和得股自乘之數股弦較乘股弦和得句自乘之數則以較乘和而用乘句股之自乘即不啻股自乘句自乘之相乘也方積者句乘股之數今句自乘不以股自乘乘

之而以句乘股乘之，句乘股比之股乘股，則少一句股較乘股之數，故必以句股較乘股，又用之乘句自乘之數，加之，而後合於股自乘以乘句自乘之數也，股自乘，不以句自乘乘之，而以股乘句之數乘之，股乘句，比之句自乘，則多一句股較乘句之數，故必以句股較乘句以乘句自乘之數減之，而後合於句自乘以乘股自乘之數也，或直而得之，或變化展轉而得之，其數均合，故不能直而得，可以變化展轉之者，舍其所隱，用其所彰，即其所彰，探其所隱，不啻縋陰平而反出劍閣之外也，先輩用此法，於上廉下廉益

隅負隅翻積等術，曲折甚多，梅總憲赤水遺珍列諸條解之，然主於明借根之理，而未晰諸法之原，因爲詳之，有弦有句股相乘之積求句股，已爲句股相乘則不必倍以積自乘爲從立方積，以弦自乘爲從，商得數爲句，自乘，又以從乘之，減句冪自乘之數，與從立方積減盡則得句，如四元玉鑑所舉，方積二百四十步，弦二十六步，求句，以二百四十自乘，得五萬七千六百爲實，以二十六自乘，得六百七十六爲從，商得一十，自乘得一百，以六百七十六乘之，得六萬七千六百，存之，又以句冪一百自乘爲一萬，用減六萬七千六百，餘

五萬七千六百。與實合。則得句一十。若求股。商得二

十四。自乘。爲五百七十六。與從相乘。得三十八萬九

千三百七十六。存之。又以股自乘之五百七十六自

乘。得三十三萬一千七百七十六。與所存相減。餘五

萬七千六百。與實合。則得股二十四。按用羃自乘相

減。即負隅也。此即以句股較句股。以廉隅名之者。以

從之增數名之也。有股弦和有句股積求句股倍積

自乘爲實（句股積倍之乃成從方）商得數爲股自乘。以股弦和

爲從。除實得數爲股弦較之總數。以此總數除股自

乘之數。爲股弦較。以較減股弦和。半之得股。試以句

三股四弦五明之句股積六股弦和九求句股倍六爲一十二自乘爲一百四十四以從九除之得一十六存之商得四爲股自乘得一十六除所存得一爲股弦較於股弦和之九減較一得八半之得四所商同卽得股四若句弦和八則以八除一百四十四得一十八存之商得三爲句自乘得九以九除所存得二爲句弦較於句弦和之八減較二得六半之得三所商同卽得句三又試以梅總憲所舉法推之句股積五百四十股弦和九十六求股倍積自乘爲一百一十六萬六千四百以九十六除之得一十二萬一

千五百存之商得四十五自乘之得二千零零二十五除所存一十二萬一千五百得六以減股弦和之九十六餘九十折半得四十五與所商合卽得股四十五此比翻積開三乘方法似爲簡便而其理易明

算法統宗設圜田徑十步截弧矢積十步問弦矢其法以倍積自乘得四百步爲實四乘積得四十爲上廉四乘徑得四十爲泛下廉五爲負隅用開三乘方法商二步乘上廉得八十爲上廉法乘負隅得十步以減泛下廉餘三十爲定下廉二自乘得四步以乘定下廉得一百二十步爲下廉法併上下廉法其二

百步爲下法復以商數二步乘之得四百步除實恰盡循案古弧田法以矢乘弦半之又以矢自乘半之合之爲弧矢形此術較今法爲疎故梅總憲以爲不合密術也形雖弧矢而以矢自乘及矢乘弦言之已是從方弧矢積既爲矢自乘與弦矢相乘之半今倍之則矢自乘及弦矢相乘之從方矣倍之自乘較不倍自乘之數爲四倍故以四乘爲上下廉然設負隅并下法其理不易了試以前法馭之積十步其爲從方也非廣二修五卽廣一修十今以積自乘從方已是兩句股不必倍得一百爲實積一十爲從商得二其廣卽矢自乘爲

四以從乘之得四十減實餘六十以所商自乘之四除之得一十五以二乘之得三十以積十除之得三爲句股較加二爲五以二乘之得十減盡卽得矢二再以矢折半得一與五相減得四倍之得八爲弦以圜徑十步衡之合數（若廣一修十則不合數）若倍數自乘得四百以四乘積得四十爲從商得二自乘得四與從乘得一百六十減四百餘二百四十以四除之得六十以十除之得六爲較以六除之得十（除六十非除六）以二乘之得二十與倍積恰合卽得矢二弦八試以句三股四明之積一十二自乘一百四十四爲實以積十二

爲從商得三自乘得九九乘從十二得一百零八用減實實餘三十六以九除之得四以商得之三乘之得一十二以十二除之得一爲句股較加三爲四得股四或商得四自乘一十六乘從得一百九十二減去實餘四十八以一十六除之得三以商得之四乘之得一十二以積一十二除之得一爲較減四爲三得句三葢積爲句乘股之數以句自乘比之則不足以股自乘比之則有餘不足則相加有餘則相減故以較加句爲股以較減股爲句也句股以盈朒分加減則積之所乘亦有加減故以積乘句羃爲朒於實

則於實中減所得數以積乘股冪爲盈於實則於所得數中減實於所得數中減實而用其餘所謂翻積法也明乎加減之理盈朒之原則翻積之指固淺近無艱奧也開平方立方之法所得數朒於原實則以減餘爲次商此積乘句冪而減實以用其餘者貎爲似之開方之法所商數盈於原實則爲不合所以有改商之法此以積乘股冪爲盈於實乃卽減實翻積以用其餘與改商之法大異初學或駭之以至於惑不知開方之從眞從也以積爲從假從也眞從而不合是眞不合也假從而不合是不合於假而轉可合

於眞也。眞從藏於實中。與所商爲表裏。假從不離於句股中。與眞從爲消息。故明於句股相乘。與股句各自乘之較。則用於實外。用於實內。其義本同也。吾友歙縣汪萊孝嬰。於算數精思入理。每發前人所未發。嘗推梅總憲以句股和求諸數立法爲誤。其說云。凡一句弦和。任設一句弦較。求得句股積。必有又一句弦較。所求之句股積。與之相等。葢兩句弦較兩數。及兩句弦較相併。與句弦和相減之餘數。必爲連比例之三率。兩句弦較兩數。必爲首末二率。兩句弦較相并。與句弦和相減之餘數。必爲中率。句弦和必爲三

率併數。此等積等句弦和得有兩形之故也。於是立有兩積相等兩句弦和相等求兩句股形各數之法云。四倍句股積自乘。句弦和除之。得數爲帶縱長立方積。以句弦和爲所帶之縱。用帶縱長立方法開之。得本方根數。爲兩句股形中兩句弦較之中率。自乘得數。爲帶縱平方積。又以中率與句弦和相減。得數爲帶縱平方長濶和。用帶縱平方長濶和法開之。得長濶兩根。爲兩句股形中。兩句弦較數。再用句弦較與句弦和求句股弦法。卽得兩句股形各數。循按止求一數。故倍而自乘。今求兩形。故四倍而自乘。倍而

自乘，即得一形之句弦較，四倍而自乘，即得兩形之中率，孝嬰獨得之解，眞可補梅氏之所未及，詳見其所著衡齋算學中。又按梅氏赤水遺珍，載丁維烈翻積之法而說之云，有句股積及股弦和較，或句弦和較，求句股，向無其法，苦思力索，知其須用帶縱立方，因立法四條，嘗考王孝通緝古算經，有題云，假令有句股相乘冪七百六十十六五十分之一，弦多於句三十六十分之九，問三事各多少，句股相乘冪，即積也，弦多於句，即句弦較也，其術云，冪自乘，倍多數而一爲實，半多數爲廉法，從開立方除之，即句，以弦多數

加之。卽弦以句除冪。卽股倍多數而一爲實者。倍句弦較除句股積自乘之數也。以較除股冪。必得兩句與一句弦較之數。故倍較除股冪。必得一句與半較之數。一句與半較之數。卽句爲根半較爲從之立方也。弦冪中去句冪所餘廉隅形詳見下條是爲句股積句弦較求句股又繼一題云。假令有句股相乘冪四千三十六五分之一。股少於弦六五分之一。問弦多少。是則句股積股弦較求弦也。然則是法唐初有之。實爲倍積自乘之術所始。梅氏以爲向無其法。其未見此書歟。王氏立句股積句弦較之題。而不及句弦和者。固以較數

有定和數無定故較有算法而和無算法孝嬰兩形之說王氏固已知之引而不發躍如也孝嬰立兩形之術不獨正梅氏之誤亦所以探王氏之隱而補其闕矣

自乘而倍之開方得弦相乘而倍之加其從數之自乘亦開方得弦

開平方出於自乘開從方出於相乘既有方即有斜綫既有從即有盈朒故句股之術由從方而生也其名見於周髀其術見於九章所謂句股各自乘并而開方之即弦是也循謂立法之原皆由純以推至於

互由緐以省至於約自乘乘之純相乘乘之互以自乘之平方緣斜綫分剖之使斜綫向外爲邊綫使邊綫向內相合已成一平方之半又加以半則弦變爲邊故欲得弦數倍而開方之也因推此意於相乘之從方亦以同數兩從方斜剖使弦向外爲邊使邊向內相合而邊既有盈朒則短長相抵中必空有一小方即從數自乘之方此句股之術所由立亦即句股相求諸術所由生也因又推之平方用倍即以兩邊各自乘也倍從方而缺一從自乘者以盈朒兩邊各自乘以盈補朒而從自乘之方自在也故用句股各

自乘并而開方之。以其簡於相乘而倍之。又加從自乘也。周髀云。數之法。出於圓方。圓出於方。方出於矩。矩出於九九八十一。故折矩以爲句廣三。股修四。徑隅五。既方其外。半之一矩。環而共盤。得成三四五。兩矩共長二十有五。是謂積矩。趙君卿注云。方。周帀也。矩。廣長也。九九。乘除之原也。按矩卽綫。方卽冪。數不離於九九。以數爲綫。乘之爲方也。下乃言句股之數而歸諸折矩。可知句股之原。亦出於九九矣。出於九九者。由自乘相乘而推致之也。折矩之義。原注未明。於折矩下繫以句股弦。此折字。卽下環而共盤之義。

以矩折爲三而環之也下云既方其外者從方之兩面向外而爲正角故曰方其外言方則從方矣今半之以所以半之之一綫與句股兩端相接環成三角之形於是三四五之率成故曰一矩環而共盤得成三四五也向外非句股而何此一矩爲弦下云兩矩其長二十有五此兩矩即句股矣即方其外者矣其長二十五者三四各自乘之共數也

矩
句
句
句
股
股
股
股
弦
弦
弦
弦
弦

倍自乘之數。卽兩邊各自乘之數。倍相乘之數。卽兩邊各自乘之數少一差自乘也。蓋自乘兩邊無盈朒。相乘兩邊有盈朒。相乘者。以盈乘朒。今以盈乘盈。則多一盈乘從之數。以朒乘朒。則少一朒乘從之數。以所多盈乘從之數。補所少朒乘從之數。仍餘一從乘

從之數。故倍自乘。必增一從自乘。乃與邊各自乘之數合也。在從方謂之帶從。在句股謂之句股差。又曰句股較。句股各自乘。并之得弦積。則弦自乘減股自乘。自然得句。減句自乘。自然得股矣。倍從方加從自乘得弦積。則弦自乘減從自乘。半之。即從方矣。弦既統乎句股各自乘之數。則弦股之較屬句。弦句之較屬股。方其股於弦中。於五五二十五中取四四一十六爲平方。句必磬折而讓之。句積九。必不能爲方。方其句於弦中。股必磬折以讓之。其狀若開方之有廉隅。故以股爲方。倍弦股較。乘股。又以較自乘并之。即句積。以句爲方。倍弦句較。乘句。

又以較自乘并之、卽股積、方（如初商之方、倍之爲二廉、較自乘卽隅法、）於是有弦較而句股可求矣、若句股兩方、並爭於弦方之中、則兩隅必相蝕、兩隅相蝕之數、卽兩畔磬折相蝕之數、故以句弦較乘股弦較、倍其數、與兩隅相蝕之數等、因而開方之、卽與兩隅相蝕之方等、是方也、加句弦較卽股、加股弦較卽句、於是有句弦較股弦較而句股可求矣、斜剖兩從方、以弦向外、其中爲較若以同數四從方、盈朒相續、成平方、其中亦爲較盈朒相續、卽句股和、故四其從方之積、加從自乘之積開方之、卽句股和、句股和自乘、減去從自乘之積、四

除之.即一從方積.其義與弦股求句弦句求股同也.弦股和自乘.弦爲方.股爲隅.弦乘股股乘弦爲兩廉狀亦如開方.蓋倍弦自乘.則統句股積各四.今弦股和自乘.股必得四.句且不能滿二.何也.弦自乘之積統句股各自乘之積.弦股和自乘.則股自乘之方四.股乘弦股較之方亦四.弦股較自乘之方一.股乘弦股較倍之.合弦股較自乘積爲句自乘積.弦股和自乘.爲股乘弦股和者二.爲股弦較乘弦股和者一.以股弦較乘股弦和.即句自乘積.今股乘弦股較之積有四.而弦股較自乘積止有一.故不滿兩句冪也.若減去一句冪.則爲股自乘者二.股乘弦股較者

亦二半之則股自乘者一股乘弦股較者亦一並之為股乘弦股和以弦股和除之即股若加一句冪則股乘弦股和之積一股弦較乘股弦和之積一並之為弦乘股弦和以股弦和除之即弦於是有弦和而句股可求矣以股弦和乘句弦和倍而開方之即句股弦之合數故減句弦和得股減股弦和得句於是有股弦和句弦和而句股可求矣九章算術立句股弦相求之術以圓材求方版之術明句弦之求股以葛纏木齊之術明句股之求弦又有股弦差與句求股弦之題五葭生池中一立木繫索二倚木於垣三圓材鋸道四開門去閫五句股

差與弦求句股之題一。戶高多於廣六尺八寸。兩隅相去適一丈。問戶高廣各幾何。

句弦差股弦差求句股弦之題一。戶不知高廣。竿不知長短。橫之不出四尺。從之不出二尺。邪之適出。問戶高廣袤之數各幾何。

句及股弦并求股之題一。竹高一丈。末折抵地。去本三尺。問折者高幾何。

股及句弦并求句股弦之題一。二人同所立。甲行率七。乙行率三。乙東行。甲南行十步而邪。東北與乙會。問甲乙行各幾何。

趙君鄉注周髀。推而明之。作三圖以括其義。實爲割圜三角之所從出。前輩於此推之至精。循此書主於明加減乘除之理。故止辨其術之出於自乘相乘不復詳其術也。

合四縱方則中少一小方

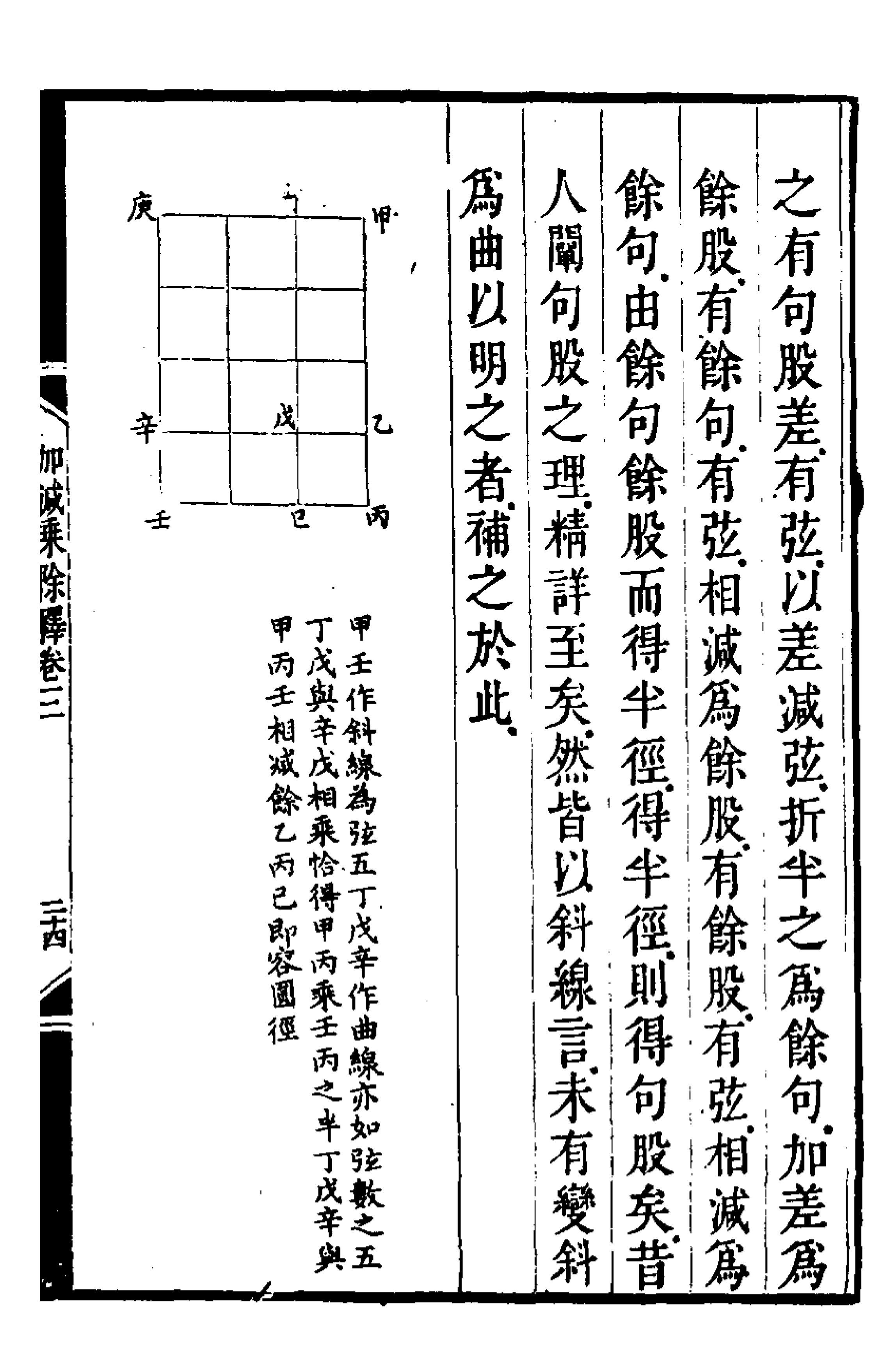
合大小四平方則中多一小方

有句股，則必有斜弦，固矣。若同此句股，同此句股之積，不斜絙之，而曲其線與句股平行，以成一縱方之廉隅曲尺形，此曲線之數，與斜絙之弦數等。其隅之徑數，卽弦與句股和之較數，於是曲尺內亦成句股形，以內句乘內股，卽外句乘外股之半。舊法以句股和減弦，卽容圓徑，然則於句股和數中，減此容圓徑數，卽得弦數。旣減此容圓徑數，而以餘句乘餘股，卽得句股積數，何也，餘句卽當內句，餘股卽當內股也。李欒城測圓海鏡，以圓城立算術，第十六問云，出西門南行四百八十步有樹，出北門東行二百步見之，

出西門而南、則餘股也、出北門而東、則餘句也、行二百步見樹則弦也、此弦卽餘句餘股之數、其法云、以二行步相乘爲實、二行步相併爲從一步、常法得半徑、常法者、開從方法也、然則有弦有積、以弦爲從、猶之有餘句餘股、相乘爲積、復并以爲從也、惟餘句餘股卽弦、故句股相乘之積、以容圓半徑除之、適得句股弦之和數、何也、以此曲尺形而直之、以一廉一隅爲句、其一廉爲股、則少一隅、以一廉一隅爲股、其一廉爲句、則亦少一隅、句少一隅、正是餘句、股少一隅、正是餘股、餘句餘股、正是斜弦、故倍句股積而除之、

爲半徑倍相乘之積而除之爲全徑也以弦與句股和相較其差爲半徑若於弦中去一句於句股和中亦去一句則弦句差與股相較其差仍爲半徑或於弦中去一股於句股和中亦去一股則弦股差與句相較其差亦仍爲半徑即卷一所謂各減一甲其差相等者也弦句差與股較餘爲半徑弦股差與句較餘爲半徑並弦句弦股兩差與句股和相較餘必爲兩半徑句股和與弦較既多一半徑則弦股弦句之差與句股和相較爲多兩半徑者而與弦相較必爲多一半徑矣故并兩差以減弦亦得容圓半徑也推

之有句股差，有弦，以差減弦，折半之爲餘句，加差爲餘股。有餘句，有弦，相減爲餘股；有餘股，有弦，相減爲餘句。由餘句餘股而得半徑，得半徑則得句股矣。昔人闡句股之理精詳至矣，然皆以斜線言，未有變斜爲曲以明之者，補之於此。



甲壬作斜線爲弦五，丁戊辛作曲線，亦如弦數之五。丁戊與辛戊相乘，恰得甲丙乘壬丙之半。丁戊辛與甲丙壬相減，餘乙丙己，即容圓徑。

再乘而半之。爲塹堵之積。再乘而三分之。爲陽馬之積。

方錐之積。再乘而六分之。爲鼈臑之積。

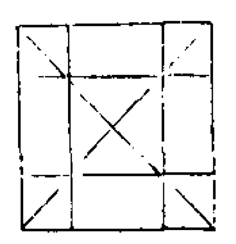
商功有堢壔。方亭。方錐。塹堵。陽馬。鼈臑。羨除。芻甍。芻童等術。究之惟塹堵陽馬方錐鼈臑而已。數學鑰以屬少廣章。

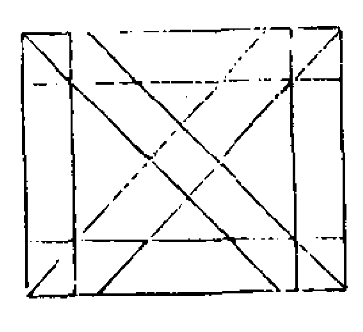
九數通考以屬方田章均并古法　方錐爲四陽馬形而與陽馬同數者試以一立方斜解之成兩塹堵若自中分兩畔斜解之必成塹堵形二兩塹堵背連形一是兩塹堵當一塹堵之積矣一塹堵斜解爲一陽馬一鼈臑若亦以兩畔斜解之必成鼈臑形四兩陽馬背連形一是兩陽馬當一陽馬之積矣一塹堵分兩畔斜解得兩陽馬背連之形若以兩塹堵背連之形分兩畔斜解之自必得四陽馬背連之形故其形爲四陽馬而其積仍一陽馬也由是剖方錐爲二間於兩塹堵背連形之兩端則爲芻甍九章算術云芻甍下廣三丈袤

四丈上袤二丈無廣高一丈是也數學鑰誤以兩塹堵背連形爲芻甍又誤爲芻蕘由是截方錐爲二上半仍爲方錐下半爲方亭九章算術云方亭下方五丈上方四丈高五丈是也截芻甍爲二上半仍爲芻甍下半爲芻童九章算術云芻童下廣二丈袤三丈上廣三丈袤四丈高三丈是也葢以方亭之廣袤化立爲平則廣袤交午之處隅隅相貫與斜綫若合符節而題湊於中以芻童之廣袤化立爲平則廣袤交午之處必不能兩隅相貫而兩斜綫之端可遇四斜綫之端不可遇方亭爲一立方四陽馬及相等之四塹堵或爲一帶從立方

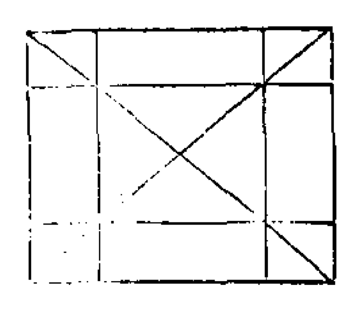
四陽馬及不相等之四塹堵而上方之形必等於底
底之形必等於四陽馬之底若芻童雖猶是一帶從
立方四陽馬及不相等之四塹堵而上方之形必不
等於底底之形必不等於四陽馬之底等則可相比
例不等則否方亭術云上下方相乘又各自乘并之
以高乘之三而一芻童術云倍上袤下袤從之亦倍
下袤上袤從之各以其廣從之并以高乘之皆六而
一曰方曰芻名既各別或三或六術亦分附循謂方
亭可以用六芻童必不可用三觀於其底固理之自
然也方錐與陽馬同積而術有自乘相乘之分故別

其名塹堵之形有二。鼈臑之形有三。不別之者其術同也。塹堵之二何。斜解立方兩端句股者一也。兩畔斜解立方作屋形者。二也。鼈臑之三何。自方錐斜解之。成四面三角形。一也。自塹堵斜解之。成四面句股形。二也。自陽馬斜解之或以四面三角者中分之。成三面句股。一面三角形。三也。而皆謂之鼈臑。亦皆謂之立三角。立方之有鼈臑。猶平方之有句股也。

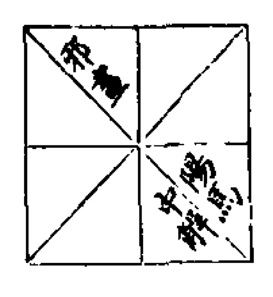




芻童兩隅之綫不能相貫



方亭隅隅相貫題湊于中



方錐正解為四陽馬邪畫為四鼈臑邪畫則陽馬迭中解

王孝通上緝古算經表云。伏尋九章商功篇。有平地役功受袤之術。至於上寬下狹。前高後卑。正經之內。闕而不論。臣晝思夜想。臨書浩歎。於平地之餘。續狹邪之法。請訪能算之人。考論得失。如排其一字。臣欲謝以千金。循按商功以邊求積。王氏此書以積求邊。如少廣方田。適相表裏。誠爲善於得間矣。然其法仍不外商功之理。劉氏之注。極精至巧。會而通之。已足括孕此書。且以其義核王氏之術。可排者正不止一字。推而窮之。雖不敢遽攫其金。亦庶幾少申其義也。其弟二題云。仰觀臺上下廣差二丈。上下袤差四丈。

上廣袤差三丈高多上廣一十一丈問廣高袤答曰高一十八丈上廣七丈下廣九丈上袤一十丈下袤一十四丈術曰以上下袤差乘廣差三而一爲隅陽冪以乘截高爲隅陽截積冪又半廣差乘塹上袤爲隅頭冪以乘截高爲隅頭截積并二積以減臺積別有求積之法詳見本書其法近易故不載餘爲實又并截高及截上袤及并廣差袤差而半之之正數爲廉法從開立方除之得上廣第六題云窖上袤多上廣一丈少於下袤三丈多於深六丈少於下廣一丈問深答曰深三丈上廣八丈上袤九丈下廣十丈下袤十二丈術曰廣差

乘袤差三而一，爲隅陽冪，置塹上廣，半廣差相加，以乘塹上袤爲隅頭冪，又置塹上袤，塹上廣，并爲大廣，又并廣差袤差，半之，加大廣爲廉法，從開立方除之，即深，第七題云，亭倉上下方差六尺，高多上方九尺，問上方，答曰，上方三尺，下方九尺，高一丈二尺，術云，方差自乘，三而一，爲隅陽冪，以乘截高，以減積，餘爲實，置方差加截高爲廉法，從開立方除之，即上方，方亭爲一立方四塹堵四陽馬，故先減四陽馬積，餘一立方四塹堵合爲二，故以方差爲一從，截高爲一從也，凡差皆并兩畔言，陽馬在隅，故謂之隅陽，以乘截

高故曰隅陽截積羃截高即高差也方亭爲正方故無袤廣之名若中爲帶兩從立方而上下廣袤皆不等則隅陽之羃必爲從方形故并而半之爲正數葢四塹堵兩大兩小并而半之適合爲大小兩立方矣惟是上袤旣侈於廣則減去廣差而上下廣相附減去袤差下袤與上廣尙閒一廣袤之差廣袤之差所謂塹上袤也以廣差及高乘而減之而後所存之四塹堵乃與中方相附合也是乘得之形廣直下而袤殺下故預半廣差乘之是謂隅頭截積在陽馬塹堵之閒東西有而南北無也窖形同於臺而多一大廣

者所知者袤所求者深袤差之內又有袤與深差是

爲塹上袤廣差之內又有廣與深差是爲塹上廣以

塹上廣乘塹上袤得深方之四隅其角與隅陽冪角

相貫位當塹堵之兩畔而塹堵之兩畔適與深差尚

不可與深合於是以半廣差加塹上廣而後以塹上

袤乘之如是則適當深袤與袤差之間而上下袤俱

如深之袤矣是爲隅頭冪半廣差者猶方亭之半廣

差也然袤與深之袤齊而廣與深之廣尚不齊何也

塹堵之橫於南北者其兩畔當塹上廣之處未有處

也於是又以塹上廣乘半袤差以消之消之而後廣

與深合矣王氏術云又半袤差乘塹上廣加隅陽冪

隅頭冪以爲方法是也深之度與廣袤俱等而廉從

必合塹上廣塹上袤廣差袤差可知矣塹上袤廣體

本全無容半之故并爲大廣廣差袤差皆塹堵邪殺

體故并而半之也總之王氏此術所舉皆差所不舉

即立方諸線之相等者所求在廣則必裁袤高以就

廣所求在深則必裁袤廣以就深裁其不相合者而

相合者皆其從矣乃循之疑也方亭積減四陽馬所

餘以兩差爲兩從以差乘差爲隅固然惟是以高差

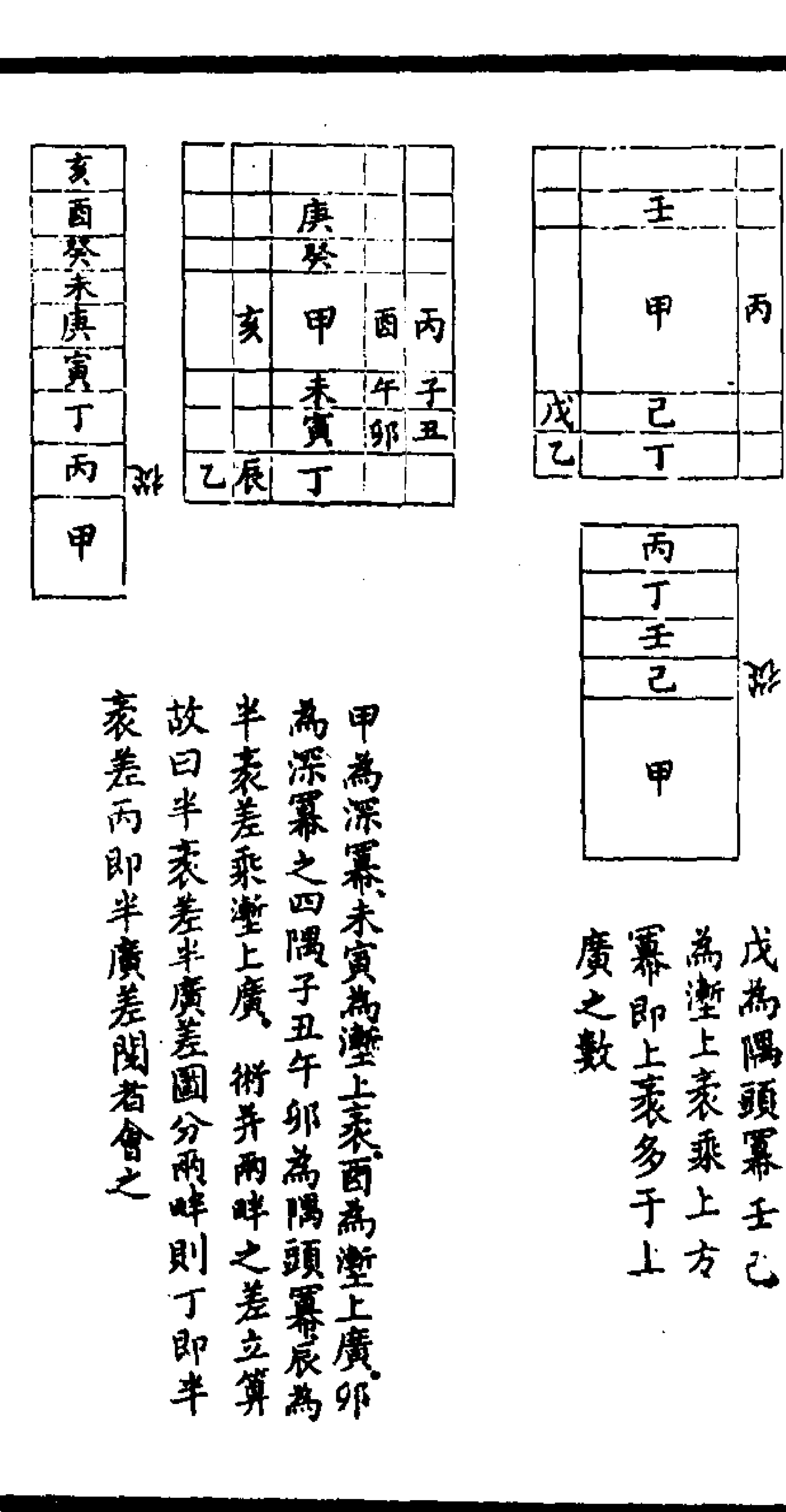
乘隅陽冪所得之陽馬非方亭陽馬之全數夫陽馬

自高差而截，則尚有四陽馬尖，附於立方之四隅，仍為四小陽馬，而自截以下之陽馬，其端不鋭而童，如縱橫剖方亭四分之一狀也，王氏依截高乘除為陽馬則改童為鋭，而鋭外尚有所餘，此積既少，彼積乃多，求之何以得密數，如方差六，自乘三而一，得十二，以截高乘之，為一百口八，減積餘三百六十，陽馬原積一百四十四尺，全高一丈二尺，乘隅陽冪十二之數也，今陽馬積僅一百口八，比原積少三十六尺，又試以下方九尺乘上方三尺，為從方，底以高一十二，乘為帶兩從立方體積三百二十四，與三百六十相

較正餘三十六尺此三十六尺者卽四小陽馬及銳外所餘之數將何以處之乎循謂此術不密試依方亭求積之術會而通之宜三其積以方差自乘乘高差爲十二陽馬下半截積以減積餘積三而一得數爲實然後以高差廣差爲兩從法求方邊又以邊例上小陽馬邊高差一率下方二率商得立方邊三率求得小陽馬底邊四率自乘以乘商得之邊減實而恰盡卽方邊定數又一法餘積不三而一而以三因方差及高差爲從法方差冪爲隅法求得數再乘而三因之減餘積恰盡亦卽方邊定數如是而得數較密蓋劉氏注九章之術法雖有

闕而義旨實包孕無遺依之則合離之則疎也有如塹堵二爲立方一二其積以開立方則塹堵之邊可得矣陽馬三爲立方一三其積以開立方則陽馬之邊可得矣鼈臑六爲立方一六其積以開立方則鼈臑之邊可得矣稱是以爲方亭臺窖等求之原始返終之道有如此也

乙為隅陽羃丙丁為塹堵厓



戊為隅頭冪壬己為塹上袤乘上方冪即上袤多于上廣之數

甲為深冪、未寅為塹上袤、酉為塹上廣、卯為深冪之四隅子丑午卯為隅頭冪、辰為半袤差乘塹上廣、術并兩畔之差立算故曰半袤差半廣差圖分兩畔則丁即半袤差丙即半廣差閱者會之

乙甲為上方丁己為下方乙戊為高甲戊為截高戊丁為方差乙戊丁為陽馬全積甲丁戊為隅陽截積乙甲丙為上立方小陽馬甲丙丁為銳外所餘

緝古第二題求羡道之術云上廣多下廣一丈二尺少袤一百四尺高多袤四丈問袤答曰袤一十四丈

第四題云築龍尾隄其隄從頭高上闊以次低狹至尾上廣多下廣少隄頭上下廣差六尺下廣少高一丈二尺少袤四丈八尺問下廣答曰一十八丈其自

注云龍尾猶羨除也其塹堵一鼈臑一并而相連其龍尾術云隄積六因之爲虛積以少高乘少袤爲隅冪以少上廣乘之爲鼈隅冪以減虛積餘三約之即三而一爲實并少高袤以少上廣乘之爲鼈從橫廉冪三而一加隅冪爲方法又三除少上廣以少袤少高加之爲廉法從開立方除之得下廣循按此術是也而義有未盡九章羨除術云并三廣以深乘之又以袤乘之六而一劉氏注云假令上廣三尺深一尺下廣一尺末廣一尺無深袤一尺下廣皆塹堵之廣上廣者兩鼈臑與一塹堵相連之廣也以深袤乘得積五

尺鼈臑居二塹堵居三其於本棊皆以爲六故六而一蓋乘上廣爲立方是六鼈臑以兩畔言之則十二鼈臑兩塹堵兩與六不合故又乘下廣及末廣爲四塹堵合之恰得六羨除王氏此術六其積是塹堵鼈臑各六矣塹堵之六爲同數三立方鼈臑之六爲上下廣差所乘之一立方隅冪者此立方之隅冪也從橫廉者如平方之兩廉也此卽一縱一橫之兩從隅冪卽從隅也除去此立方六鼈隅存六塹堵適當三立方之積故三除其積而存二塹堵適當一立方之積也六鼈積所當之一立方其中所減者鼈隅而從橫兩廉及一

立方尚在此積已隨而三除之故必以廣差三除之以加袤差高差而爲從法也循之疑也推此術以袤差高差合立方爲高以三除廣差合袤差高差立方爲袤固也惟是鼈積之立方既減去鼈隅則二壍堵之立方所當鼈隅者其積將何以位置則於減積三而一之後既以差爲從法又必以隅冪爲隅法而後可也其所云方法者或含此旨然未嘗明表出之學者惑矣美道術卽龍尾隄術雖有兩鼈臑一鼈臑之殊而兩差亦合而算之則兩猶一也惟所舉者上廣所求者下廣故必以上廣多下廣數加上廣少袤爲

下廣少袤。又以高多袤。加下廣少袤。爲下廣少高。餘盡同也。又第三題有築隄術云。隄西頭上下廣差六丈八尺二寸。東頭上下廣差六尺二寸。東頭高少於西頭高三丈一尺。東頭上廣多東頭高四尺九寸。正袤多於東頭高四百七十六尺九寸。問東頭高。答曰。三尺一寸。術曰。以高差乘下廣差六而一。爲鼈冪。以高差乘小頭廣差二而一。爲大臥塹頭冪。半高差乘東頭上廣多高之數。爲小臥塹頭冪。并三冪。爲大小塹鼈率。乘正袤多小高之數。以減隄積。餘爲實。又并正袤多小高。并上廣多小高。及半高差而增之。兼半

小頭廣差加之爲廉法從開立方除之即小高自注云此爲平隄在上羡除在下兩高之差即除高其餘兩邊各一鼈臑中一塹堵循按此平隄既有廣差又高與廣不等則在上之平隄不得竟以立方視之也以高差乘下廣差此所謂下廣差者東下廣與西下廣之差也爲鼈臑故六而一高差小頭廣差俱邪殺線故二而一高差殺上廣多東頭東之差不殺故止半高差乘之東廣差六尺四寸故爲大臥塹上廣高差四尺九寸故爲小臥塹減此二塹一鼈下餘一塹堵爲半高差乘小高之冪上餘一小高乘上廣高差

之羃一東下廣乘小高而半之之羃其線度皆與小高齊故以爲從唯大小壍羃鼈羃俱袤差乘之較全袤乘得者爲少則亦猶方亭之隅陽截積也其邪附於小高之下及大小壍鼈率之所餘又何以處乎試仍用龍尾隄術馭之六其隄積爲虛積爲上平隄形六下鼈隅立方一臥壍形三因以下廣差乘高差又連乘袤差爲鼈截積（尚有所餘小立方形）又并東廣差東上廣與小高差三因之乘高差爲小臥壍大臥壍截積（尚餘形）立方減虛積其餘三而一爲帶從立方積以高差及倍東上廣多高差東廣差三者爲從又以東頭上廣

多高差。加東廣差。及三除下廣差。其乘以高差。又以求數自乘。二者其爲隅法。此隅法。猶龍尾隄術以隅冪爲隅法也。要之所知者皆差。所不知者必立方。卽所已知者。而減去所不知者。必相胳合於立方。則以所知爲從。而數莫遁矣王氏創爲此法。實大益後人神智。元欒城李氏益古演段測圓海鏡兩書。用平方立方三乘方等。以馭諸術。其理無踰於此。而所以然則出於劉氏九章注之用三品赤黑棊法。棊者。蓋以金玉木石之類爲之。作立方塹堵陽馬鼈臑四形。每形赤黑各若干數。簇爲方錐方亭芻甍芻童美除等

狀。即知其方正斜直之殊。及方隅廉從之故。累而合之。裁廣就袤。合半爲整。可成從方。變化無端。立算之妙。莫精於是。王氏謂其未爲司南。而自詡曲盡無遺。尙非至論。循服膺於劉氏。而甚慕王氏之善悟。因申其義趣。而改其踈舛。以爲用平方立方乘方者。述其門徑。頗有道正之。

六鼈臑積

子 午 丑 己

三鼈臑

已隅先減去

二塹堵積

丙 甲 乙 丁

乙隅未減去宜有以消之

午丑丁丙爲從橫廉

子 丑 午 甲 丁 丙 從

子丑午合甲丁丙爲從方

甲乙東頭高，甲丙西頭
高，乙丙高差，戊辛上廣
多東頭高差，辛癸東頭
上下廣差，辛子西頭上
下廣差，癸子下廣差，甲
己上廣，乙壬東下廣，丙
子西下廣，

寅卯爲東
頭高，即小
高，乙午爲
正袤，多于
東頭高，

有句股而後可以馭平圓有體羃而後可以馭立圓自一至九數也加減乘除錯綜此數者也乘而後有羃再乘而後有體有羃有體則數已成形故平方立方縱方生於加減乘除而加減乘除所生而致者實盡乎此句股者生於形者也形復生形而非數無以馭則加減乘除又爲句股之所用也句股爲用形之始故爲衆形之所從生蓋有句股而復用以割圓則圓之形成有句股而化之爲銳鈍則三角之用著體羃爲句股之立者規之卽成立圓又弧三角之弦切所集也西人薩几理得幾何原本一書精於說形梅

勿菴明以句股之理夫論形未有不本諸句股猶論數未有不本諸加減乘除也學者由數以知形由形以用數悉諸加減乘除之理自可識方圓冪積之妙論形之書多矣余別有著緣句股商功及方田少廣中有求圓之術因論其梗槩於此

